Multiples, diviseurs, nombres premiers

MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN NOMBRE NATUREL

a et *b* étant deux nombres naturels
a* est multiple de *b
b* est diviseur de *a
***a* est divisible par b**
signifie qu'il existe un nombre naturel *k* tel que $a=b*k$

Exemple : *L'ensemble des multiples de 6 est l'ensemble {6 ;12 ;28 ;24 ;30 ;36…}*
L'ensemble des diviseurs de 36 est {1 ;2 ;3 ;4 ;6 ;9 ;12 ;18 ;36}

Propriétés

Tout naturel *n* est multiple de **1** et **1** est diviseur de tout naturel

$$n=1*n$$

Tout naturel est à la fois multiple et diviseur de lui-même

$$n=1*n$$

0 est multiple de tout naturel et tout naturel est diviseur de **0**

$$0=n*0$$

0 n'a qu'un multiple : **lui-même**
Tous les autres nombres naturels ont une infinité de multiples

1 n'a qu'un diviseur : **lui-même**

Si un nombre est diviseur de *n*, alors le quotient *q* de *n* par ce nombre est aussi un diviseur de *n*

$$n=aq$$

VOIR FICHE METHODE 1: Trouver tous les diviseurs d'un nombre ou reconnaître un nombre premier

Propriété 1: Somme de deux multiples

Si les nombres naturels *a* et *b* sont multiples de *c*, alors ***a*+*b*** est aussi multiple de *c*
Si le nombre naturel *c* (c≠0) est diviseur des nombres naturels *a* et *b*, ***alors*** *c* est aussi un diviseur de **a+b**

Propriété 2: Différence de deux multiples

Si $a \geq b$ et **si** les nombres naturels *a* et *b* sont multiples de *c*, ***alors a – b*** est aussi multiple de *c*
Si $a \geq b$ et **si** le nombre naturel *c* ($c \neq 0$) est un diviseur des nombres naturels *a* et *b*, ***alors c*** est aussi un diviseur de ***a - b***

Propriété 3: Produit de deux multiples

Si les nombres naturels *a* et *b* sont multiples de *c*, ***alors ab*** est aussi multiple de *c*
Si $a \geq b$ et **si** le nombre naturel *c* ($c \neq 0$) est un diviseur des nombres naturels *a* et *b*, ***alors c*** est aussi un diviseur de ***ab***

Propriété 4: Multiple d'un multiple

Si le nombre naturel *a* est multiple du nombre naturel *b* et **si *b*** est multiple du nombre naturel *c*, ***alors a*** est multiple de *c*
Si le nombre naturel *c* ($c \neq 0$) est diviseur du nombre naturel *b* et ***si b*** est diviseur du nombre naturel *a*, ***alors c*** est diviseur de *a*

CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ

- Un nombre est divisible par **2** lorsqu'il se termine par **0-2-4-6-8**
  Exemple : 30 ; 54 ; 126

- Un nombre est divisible par **3** lorsque que la somme des chiffres de ce nombre est un multiple de **3**
  Exemple : 108 ; 324 ; 1803

- Un nombre est divisible par **4** lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de **4**
  Exemple : 108 ; 324 ; 560

- Un nombre est divisible par **5** lorsqu'il se termine par **0 ou 5**
  Exemple : 30 ; 35 ; 120 ; 335

- Un nombre est divisible par **10** si et seulement si son chiffre des unités est **0**
  Exemple : 30 ; 120

- Un nombre est divisible par **25** si et seulement s'il termine par **0, 25, 50 ou 75**
  Exemple : 30 ; 120

Le chiffre des unités n'est suffisant pour décider de la divisibilité d'un nombre que dans les cas de la divisibilité par 2, 5 et 10

NOMBRES PREMIERS

- Nombres premiers = nombre entier admettant 2 diviseurs distincts → **1 et lui-même**
  Exemple : *2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 97 …*

VOIR FICHE METHODE 1: Trouver tous les diviseurs d'un nombre ou reconnaître un nombre premier

Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

- Décomposer un nombre n en produit de facteurs premiers, c'est écrire n sous la forme **d'un produit de facteurs qui sont tous des nombres naturels premiers** : *décomposition unique*
  Exemple : $120 = 2 * 60 = 2 * 6 * 10 = 2 * 2 * 3 * 2 * 5 = 2^3 * 3 * 5$

VOIR FICHE METHODE 3: Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers

Diviseur d'un nombre n en relation avec sa décomposition en produit de facteurs premiers

- La décomposition en facteurs premiers **de tout diviseurs de *n*** ne peut contenir que des nombres premiers figurant dans celle de n avec des **exposants au plus égaux à ceux dans la décomposition de *n***
  Exemple : *les diviseurs de 882 possèdent une décomposition de la forme :*
  $2^a * 3^b * 7^c$ *avec* $a \leq 1$ $b \leq 2$ $c \leq 2$
  147 {égal à $3^1 * 7^2$ *} est par exemple un diviseur de 882*

MULTIPLES ET DIVISEURS COMMUNS A DEUX NOMBRES

Plus petit commun multiple (ppcm)

- Le PPCM de 2 nombres entiers est le plus petit nombre non nul qui est multiple à la fois de ces 2 nombres
  Exemple : *Multiples de 42 = {42 ; 84 ; 126 ; 168 ; …}*
  Multiples de 63 = {63 ; 126 ; 189 ; …}
  PPCM = (42 ; 63) = 126

Plus grand commun diviseur (pgcd)

- Le PGCD de 2 nombres entiers est le plus grand diviseur commun à ces 2 nombres
  Exemple : *Diviseurs de 42 = {1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 21}*
  Diviseurs de 63 = {1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63}
  PGCD = (42 ; 63) = 21

NOMBRES NATURELS PREMIERS ENTRE EUX

- Deux nombres naturels dont le pgcd est 1 → ***premiers entre eux***
- Deux nombres premiers entre eux → ***diviseur commun 1***

Exemple : *8 et 15 sont premiers entre eux car leur seul diviseur commun est 1*

Propriété

Les décompositions en produit de facteurs premiers de deux nombres premiers entre eux ne comportent aucun facteur commun

Divisibilité par un produit de nombres premiers entre eux

Propriété 1

Si n est divisible par a et par b et **si** a et b sont des nombres premiers entre eux, **alors** n est divisible par leur produit ab

Propriété 2

a et b étant deux nombres naturels, **si** n est divisibles par le produit ab, **alors** n est divisible par a et par b

Théorème de Gauss

Si un nombre naturel divise un produit de deux facteurs et **s'il** est premier avec l'un d'eux, **alors** il divise l'autre

Exemple : *6 divise 390*

*Or 390 = 5 * 78* *et* *6 est premier avec 5* ***donc 6 divise 78***